Ad soyad:

Numara: 01.06.2020

MATRİSLER TEORİSİ FİNAL SINAV SORULARI

1. $$\begin{aligned} x_1+2x_2-x_3&=-1\\ 3x_1+8x_2+2x_3&=28\\ 4x_1+9x_2-x_3&=14 \end{aligned}$$ lineer denklem sistemini cramer metodu yardımıyla çözünüz.

2. $$\begin{aligned} -2x+y+z&=5\\ x-2y+z&=-2\\ x+y-2z&=-3 \end{aligned}$$ lineer denklem sistemini ilaveli asli determinat yardımıyla çözünüz.

3. $A=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 3 & 2\end{bmatrix}$ matrisinin köşegenleştirilmiş halini bulunuz. Köşegen matris olacak şekilde bir P regüler matrisi bulunuz.

4. $A=\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\ 3 & 0 & 1\end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix}$ matrisleri için $(AB)^t=B^tA^t$ olduğunu gösteriniz.

MATRİSLER TEORİSİ FİNAL SINAVI CEVAP ANAHTARI

1) $x_1 + 2x_2 - x_3 = -1$ lineer denklem sistemini

$3x_1 + 8x_2 + 2x_3 = 28$ Cramer metodu ile çözünüz

$4x_1 + 9x_2 - x_3 = 14$

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 8 & 2 \\ 4 & 9 & -1 \end{vmatrix} = 1(-8-18) - 2(-3-8) - (27-32)$$

$$= 1$$

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 28 & 8 & 2 \\ 14 & 9 & -1 \end{vmatrix}}{1} = -2$$

$$x_3 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 8 & 28 \\ 4 & 9 & 14 \end{vmatrix}}{1} = 5$$

$$x_2 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 3 & 28 & 2 \\ 4 & 14 & -1 \end{vmatrix}}{1} = 3$$

Scanned by CamScanner

2) $-2x+y+z=5$ lineer denklem sistemini
$x-2y+z=-2$ ilaveli asli determinant
$x+y-2z=-3$ yardımıyla çözünüz.

$$|A|=\begin{vmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{vmatrix}=0$$

$$\delta_2=\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix}=3\neq 0 \;\vee\; \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 1 \end{vmatrix}=3\neq 0 \;\vee\; \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}=3\neq 0$$

$$\vee \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix}=3\neq 0$$

tüm asli determinantlar sıfırdan farklı.

$\delta_2=\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix}=3\neq 0$ ---(*) alalım. rank $A=2$ dir.

ilaveli asli determinantı $\delta_{2+1}=\begin{vmatrix} -2 & 1 & 5 \\ 1 & -2 & -2 \\ 1 & 1 & -3 \end{vmatrix}=0$

olup çözüm vardır. (*) a göre denklemi düzenlersek

2) devamı

$-2x + y = 5 - t$, $z = t$ için

$x - 2y = -2 - t$

$\delta_2 = \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} \neq 0$ olup sistem cramerdir.

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 5-t & 1 \\ -2-t & -2 \end{vmatrix}}{3} = t - \frac{8}{3}$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} -2 & 5-t \\ 1 & -2-t \end{vmatrix}}{3} = t - \frac{1}{3}$$

Lineer denklem sisteminin çözümü

$$\begin{cases} x = t - \frac{8}{3} \\ y = t - \frac{1}{3} \\ z = t \end{cases}$$ dir.

3) $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$ matrisinin köşegenleştirilmiş halini bulunuz. Köşegen matris olacak şekilde bir P regüler matrisi bulunuz.

Öncelikle özdeğer ve özvektörleri bulalım.

$\det(\lambda I - A) = 0$ $\qquad \begin{vmatrix} \lambda-1 & -2 \\ -3 & \lambda-2 \end{vmatrix} = 0$

$(\lambda-1)(\lambda-2) - 6 = 0$

$\lambda^2 - 3\lambda - 4 = 0$

$\lambda_1 = -1 \quad \lambda_2 = 4$

Farklı özdeğerlere karşılık gelen özvektörler lineer bağımsız olduğundan A matrisi köşegenleştirilebilirdir.

* $\lambda_1 = -1$ için özvektör bulalım.

$$\begin{bmatrix} -2 & -2 \\ -3 & -3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$-2x_1 - 2x_2 = 0$$
$$-3x_1 - 3x_2 = 0$$

$x_2 = t$ için $x_1 = -t$ $\qquad V_1 = \begin{bmatrix} -t \\ t \end{bmatrix} = t\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$

$V_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$ alınabilir.

* $\lambda_2 = 4$ için özvektör

$$\begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$3x_1 - 2x_2 = 0$ $\qquad x_2 = t$ için $x_1 = \frac{2}{3}t$

$-3x_1 + 2x_2 = 0$

$$V_2 = t\begin{bmatrix} 2/3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

4) $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

matrisleri için $(AB)^t = B^t A^t$ olduğunu gösteriniz.

$$AB = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix}_{2\times 3} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}_{3\times 2} = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 4 & 0 \end{bmatrix}$$

$$(AB)^t = \begin{bmatrix} 4 & 4 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{--}(1)$$

$$B^t A^t = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 0 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 4 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{--}(2)$$

(1) ve (2) den $(AB)^t = B^t A^t$